第一章　數與數線

重點整理

▲單位列表：

億位	千萬位	百萬位	十萬位	萬位	千位	百位	十位	個位	小數點	十分位	百分位	千分位	萬分位

▲有理數與實數：〈93軍校甲、94軍校乙、96警專乙、97警專乙〉

㈠有理數Q：凡是能寫成如$\frac{a}{b}$（a、b都是整數，且b≠0）的數。

㈡有理數及實數均具有加、減、乘、除法的封閉性質，而無理數則否。

㈢若 $a,b\in Q,\sqrt{e}\notin Q,\ a+b\sqrt{e}=0\Leftrightarrow a=b=0$ 。

㈣若 $a,b,c,d\in Q,\ \sqrt{e}\notin Q,$ 且$a+b\sqrt{e}=c+d\sqrt{e}\Leftrightarrow a=c,b=d$ 。

㈤有理數的稠密性：在任意兩個相異的有理數之間，至少有一個有理數存在。

㈥有限小數與循環小數均為有理數，若不是有理數則其為無理數。

㈦$N\subset Z\subset Q\subset R$

- 實數
  - 有理數
    - 整數
    - 分數
    - 小數
      - 有限小數
      - 循環小數
  - 無理數 → 不循環的無限小數

㈧分母有理化：將一個分母含有根號的式子，經由整理使得分母不含根號的過程。

▲自然數個數求法：〈94軍校乙〉

從自然數a到另一個自然數b的個數求法：

㈠a到b共有$b-a+1$個。

㈡介於a與b之間共有$b-a-1$個。

▲絕對值：〈95警專甲〉

㈠絕對值：設$a\in R$，$|a|$表數線上a與原點的距離。

$$a\in R，|a|=\begin{cases}a，a\geqq 0。\\ -a，a<0。\end{cases}$$

㈡$|a+b|\leqq|a|+|b|$，且等號成立$\Leftrightarrow ab\geqq 0$。

㈢$|x-a|\leqq b\Leftrightarrow a-b\leqq x\leqq a+b$；

$|x-a|\geqq b\Leftrightarrow x\geqq a+b$或$x\leqq a-b$。

㈣$n\leqq x\leqq m\Leftrightarrow\left|x-\dfrac{m+n}{2}\right|\leqq\dfrac{m-n}{2}$；

$x\geqq m$或$x\leqq n\Leftrightarrow\left|x-\dfrac{m+n}{2}\right|\geqq\dfrac{m-n}{2}$。

第二章　幾何基本認識

重點整理

▲三角形的五心性質：

<table>
<tr><th colspan="2">名稱</th><th>內心</th><th>外心</th><th>重心</th><th>垂心</th><th>旁心</th></tr>
<tr><td colspan="2">定義</td><td>△三內角的平分線交點</td><td>△三邊之垂直平分線交點</td><td>△三中線交點</td><td>△三高之交點</td><td>△一內角與另兩外角之平分線交點</td></tr>
<tr><td colspan="2">性質</td><td>一、內心到三邊等距
二、內切圓之圓心</td><td>一、到三頂點等距
二、外接圓之圓心</td><td>重心到頂點之距離為該中線長的三分之二</td><td>垂心到頂點之距離為外心對邊距之二倍</td><td>一、旁切圓之圓心
二、到包含三邊之直線等距</td></tr>
<tr><td rowspan="3">位置</td><td>銳角△</td><td rowspan="3">恆在內部</td><td>在△內部</td><td rowspan="3">恆在△內部</td><td>在△內部</td><td rowspan="3">恆在△內部</td></tr>
<tr><td>直角△</td><td>在斜邊中點</td><td>直角頂點</td></tr>
<tr><td>鈍角△</td><td>在△外部</td><td>在△外部</td></tr>
<tr><td colspan="2">個數</td><td>一</td><td>一</td><td>一</td><td>一</td><td>三</td></tr>
</table>

▲直角△、正△、等腰△與內心、外心、重心、垂心的關係：

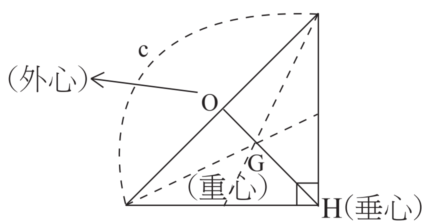
一、直角△斜邊中點（外心）到三頂點等距離。

二、直角△斜邊上的中線長 $=\frac{1}{2}$ 斜邊長。

三、直角△的外心至垂心距離 $=\frac{1}{2}$ 斜邊長。

四、直角△的重心至垂心距離 $=\frac{1}{3}$ 斜邊長。

五、直角△的重心至外心距離 $=\frac{1}{6}$ 斜邊長。



$\overline{OH}=\frac{1}{2}c$，$\overline{HC}=\frac{1}{3}c$，$\overline{OG}=\frac{1}{6}c$

正△	正△：內心、外心、垂心、重心合一。 注意：△的內心、外心、垂心、重心中任兩個重合時，則為正△。
等腰△	等腰△：內心、外心、垂心、重心共線。

▲重心的重要性質：

一、$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AG}$。

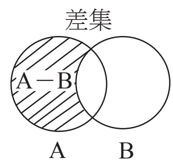
二、$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\frac{3}{2}(\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{CG})$。

第三章　集合與函數

重點整理

▲設A、B表集合，則：〈99警專乙〉

一、「$x \in A \Rightarrow x \in B$」成立時，則$A \subset B$。



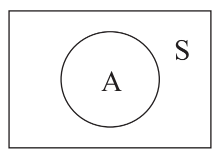
二、$A = B \Leftrightarrow A \subset B$且$B \subset A$。

三、$A \cap B = \{x \mid x \in A$且$x \in B\}$。

四、$A \cup B = \{x \mid x \in A$或$x \in B\}$。

五、$A - B = \{x \mid x \in A$且$x \notin B\}$（表A與B的差集）。

六、若S代表全班同學的集合，A代表出席同學的集合，S－A代表缺席同學的集合$\Rightarrow$S－A稱為A在S（宇集）中的補集，簡記為A'。



七、若$C \subset S$，令C'表示C在S的補集，設A與B是S的子集，則$(A \cap B)' = A' \cup B'$。

▲設A、B、C均為集合，ϕ表示空集合：〈93軍校甲〉

一、交換律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。

二、結合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

三、分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

(四) $A \cap \phi = \phi$，$A \cup \phi = \phi \cup A = A$。

(五) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$，$A \cup B = B$。

(六) $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

$(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$

故 $(A \cap B) \cup A = A$，$(A \cup B) \cap A = A$。

(七) 若 $A \cup B = \phi$，則 $A = \phi$ 且 $B = \phi$。

(八) 若 $A \subset B$，$B \subset C$ 則 $A \subset C$；若 $S \subset A$ 且 $S \subset B$ 則 $S \subset A \cap B$。

▲n(A)表A集合中不同元素個數，n(B)表示B集合中不同元素個數，則：〈95警專乙〉

(一) $n(A) + n(B) = n(A \cap B) + n(A \cup B)$。

(二) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$。

(三) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$。

▲子集合：

(一) 子集：設A、B為兩集合，且A中的任一元素都屬於B，則稱A為B的子集，記作$A \subset B$或$B \supset A$（讀作A包含於B或B包含A）。若$\exists a \in A$，但$a \notin B$，則A不是B的子集，記作$A \not\subset B$。

(二) 集合的相等：若不考慮元素的排列順序及重複次數，設A、B兩集合的元素完全相同，則稱A、B為相等的集合，記作$A = B$。當$A = B \Rightarrow A \subset B$且$B \subset A$。

(三) 空集合：空集合為任何集合的子集合，意指不含任何元素的集合稱為空集合，記作ϕ或$\{\}$。

第四章　多項式與因式分解

重點整理

▲多項式定義：〈95警專乙〉

一將數及具有數的性質的文字符號x、y、z等，經過四則運算後所形成之式子稱為多項式。

二如$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$，其中$n$是正整數或零；$a_n$、$a_{n-1}$、…、$a_1$、$a_0$都是數，此式子稱為$x$的多項式，此時$a_k$為k次項的係數，$a_0$為常數項。係數可以是整數、有理數、實數或複數。

三整係數多項式集：所有整係數多項式所形成的集合，以$Z[x]$表示。同理，以$Q[x]$、$R[x]$、$C[x]$分別表有理係數多項式集、實係數多項式集、複係數多項式集。

四當$a_n\neq 0$時，n稱為多項式$p(x)$的次數，以$\deg p(x)=n$表示，而a_n稱為$p(x)$的領導（首項）係數。

五常數多項式：係指只有a_0項的多項式，分為以下兩種：

㈠零多項式：即為0，沒有次數。

㈡零次多項式：除零多項式外之常數多項式，其次數為0。

六多項式若其次數係由小而大的排列，稱為升冪排列；反之稱為降冪排列。

㈦設 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，

$q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$ 為兩多項式，其中 a_n、$b_m\neq 0$

，則兩多項式相等 $p(x)=q(x)$ 的充要條件為：

$m=n$ 且 $a_i=b_i$，對所有 i 成立。

【註：㈠ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$n\geqq 0$

，$a_n\neq 0$，$\deg(f(x))=n$，a_n：領導係數。

㈡若 $\deg(f(x))=0\begin{cases} a_0=0\text{，}f(x)\text{：零多項式} \\ a_0\neq 0\text{，}f(x)\text{：零次多項式} \end{cases}$。

㈢多項式文字符號不可在分母、根號或絕對值。】

▲多項式四則運算：〈93軍校乙、93軍校甲、95警專甲、96警專甲、96警專乙、97警專乙〉

㈠加減法：同次項對應項相加減。次數滿足 $\deg(f(x)\pm g(x))\leqq \deg f(x)$ 與 $\deg g(x)$ 之較大者。

㈡乘法：以分配律各單項相乘，同次整理合併。其次數滿足 $\deg(f(x)\times g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$。

㈢ $k\neq 0$，若 $f(x)$ 為x的多項式，則 $\deg(f(x+k)-f(x))=n$

$\Leftrightarrow \deg(f(x))=n+1$。

【註：$f(x)$：n 次多項式，$n\geqq 1$，$a\neq 0$，

$\deg(f(x+a)-f(x))=n-1$。】

㈣除法：設 $f(x)$、$g(x)$ 為兩多項式且 $g(x)$ 不是零多項式，則恰有兩多項式商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$ 滿足：

$f(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。

㈤除法原理：$f(x)=g(x)\times Q(x)+r(x)$，$0\leqq \deg(r(x))<\deg(g(x))$。

第五章　不等式與方程式

重點整理

▲不等式：〈93軍校甲、93軍校甲、96警專乙、97警專甲、99警專甲〉

一類別：

(一) $3x+4\leqq 7$ 稱一元一次不等式（因為只有一個未知數x及其次數為1）。〈94軍校乙〉

(二) $2x-7y>5$ 稱二元一次不等式（因為有二個未知數且二者之次數皆為1）。

二性質：

(一)若 $a>b$，則 $\begin{cases} a+c>b+c \\ a-c>b-c \end{cases}$。

(二)若 $a>b$ 且 $c>0$，則 $ac>bc$

若 $a>b$ 且 $c<0$，則 $ac<bc$。

(三)若 $a>b$，且 $b>c$，則 $a>c$

若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$

但 $a>b$，$b<c$ 或 $a<b$，$b>c$ 時，則a、c的大小無法確定。

(四)若 $a>b>0$ 或 $0>a>b$，則 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$（a、b必須同號數）。

(五)若 $a>b$，且 $x>y$，則 $a+x>b+y$，$a-y>b-x$

但 $a-x>b-y$ 不一定成立。

㈥若$a>b>0$，$c>d>0$，則$ac>bd$

若$0>a>b$，$0>c>d$，則$ac<bd$

但$a>b$，$c>d$，則$ac>bd$未必成立。

㈦$(a-b)^2=(b-a)^2\geqq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\geqq 2ab$。

㈧若$a\geqq 0$，$b\geqq 0$，則$a^2\geqq b^2\Leftrightarrow a\geqq b$。

㈨若$a>b$，則$a^3>b^3$必成立；

但$a^2>b^2$或$|a|>|b|$未必成立。

㈩若$a>0$，$b>0$，則$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

若a、$b\in R$，則$|a|+|b|\geqq 2\sqrt{|ab|}$。

⑴若$a>0$，$b>0$，則$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$；$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq\frac{2}{\sqrt{ab}}$。

三不等式的解：〈94軍校乙、94軍校甲、98警專甲〉

㈠$ax+b>c\Rightarrow ax>c-b\Rightarrow x>\frac{b-c}{a}$

若$\begin{cases} x>k\text{或}x\geqq k\text{時，有最小的整數解。} \\ x<k\text{或}x\leqq k\text{時，有最大的整數解。} \end{cases}$

㈡二次不等式之解法：〈99警專甲〉

$y=(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha>\beta$：

1.$(x-\alpha)(x-\beta)>0\Leftrightarrow x>\alpha$或$x<\beta$。

2.$(x-\alpha)(x-\beta)<0\Leftrightarrow \beta<x<\alpha$。

3.$(x-\alpha)(x-\beta)\geqq 0\Leftrightarrow x\geqq\alpha$或$x\leqq\beta$。

4.$(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0\Leftrightarrow \beta\leqq x\leqq\alpha$。

㈢恆正恆負：設$f(x)=ax^2+bx+c$為二次函數，$D=b^2-4ac$

1.對任意實數x，$f(x)>0$恆成立$\Leftrightarrow a>0$且$D<0$。

2.對任意實數x，$f(x)<0$恆成立$\Leftrightarrow a<0$且$D<0$。